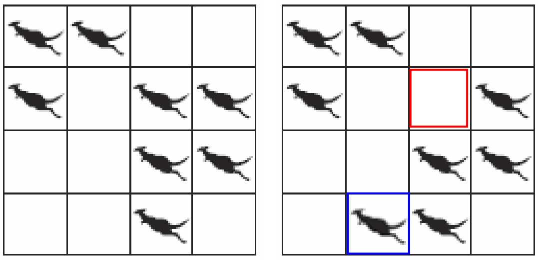
Kangourou 2005

- L’épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites**.
- **Il y a une seule bonne réponse par question**. Les bonnes réponse rapportent 4, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n’est donnée, la question rapporte 0 point.
- Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes consécutives depuis la première question, un score de 8 assurant un prix).

1. 8 cases de la grille ci-contre sont occupées par des kangourous. On voudrait qu’il y ait exactement deux kangourous par ligne et par colonne. Quel est le plus petit nombre de kangourous devant sauter d’une case à une autre case (par forcément voisine) ?
   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



   Réponse B)

2. Dans une épreuve de natation (sans ex æquo) ; Sophie a obtenu le 5^{e} meilleur résultat, qui est aussi le 5^{e} plus mauvais. Combien de concurrents ont participé à la compétition ?
   A) on ne peut pas le dire B) 5 C) 9 D) 10 E) 11

   Sophie est 5^{e} et donc il y a 4 concurrents devant elle et 4 concurrents après elle ;
   Au total, il y avait 9 compétiteurs ;
   Réponse C)

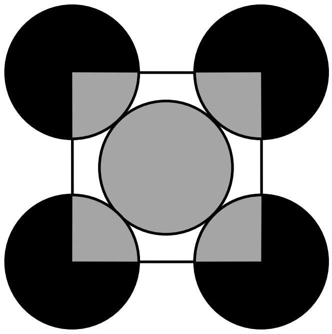
3. La moyenne de deux nombres est 2005. Si l’un de ces nombres est 5, quel est l’autre ?
   A) 2010 B) 4010 C) 2005 D) 4005 E) 1005

   $\frac{x+5}{2} = 2005 \quad \Leftrightarrow \quad x+5 = 4010 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4005$;
   Réponse D)

4. 18 élèves traversent la route deux par deux. Ces groupes de deux sont numérotés de 1 à 9. Un groupe portant un numéro pair est un groupe « fille-garçon », un groupe portant un numéro impair est un groupe « garçon-garçon ».
   Combien de garçons effectuent la traversé ?
   A) 10 B) 12 C) 14 D) 11 E) 18

   Il y a 5 numéros impairs et 4 numéros pairs ;
   Soit un total de 14 garçons ;
   Réponse C)

5. Sur la figure, cinq cercles de même rayon se touchent. On a tracé le carré dont les sommet sont les centres des quatre cercles extérieurs.



Quel est alors le quotient $\dfrac{\text{aire grisée}}{\text{aire noire}}$?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{2}{5}$

D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{5}{4}$

L'aire grisée correspond à 2 fois l'aire d'un disque ;

L'aire noire correspond à $4\times\dfrac{3}{4}=3$ fois l'aire d'un disque ;

Le quotient est donc $\dfrac{2}{3}$;

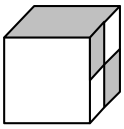
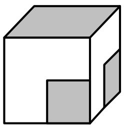
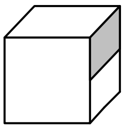
Réponse D)

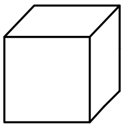
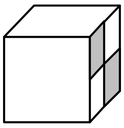
6. Thomas gonfle 8 ballons toutes les trois minutes. Si un ballon sur dix éclate, combien de ballons seront gonflés après une demi-heure ?

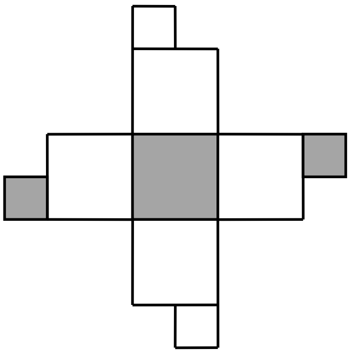
A) 40 B) 54 C) 60 D) 72 E) 80

8 ballons toutes les trois minutes ;
$8\times10=80$ ballons en $3\times10=30$ minutes ;
8 ballons ont éclaté ;
$80-8=72$ ballons en une demi-heure ;
Réponse D)

7. Un de ces cubes correspond à celui qui est représenté déplié. Lequel ?

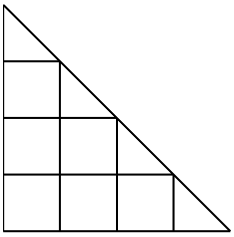
A) 
B) 
C) 

D) 
E) 



Réponse E)

8. Sur la figure ci-contre, on peut voir 7 carrés dessinés. De combien le nombre des triangles dessinés dépasse-t-il celui des carrés ?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) la même quantité



En comptant bien, on arrive à trouver 10 triangles ;
Donc il y a 3 triangles de plus que de carrés ;
Réponse C)

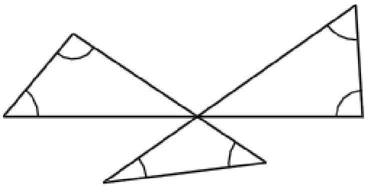
9. On complète les cases vides de la grille dessinées. Les nombres de chaque ligne forment une progression arithmétique (l'augmentation d'une case à la suivant est toujours la même. Il en est de même pour les colonnes et aussi pour les diagonales.
Combien vaut x ?
A) 49 B) 42 C) 33 D) 28 E) 4

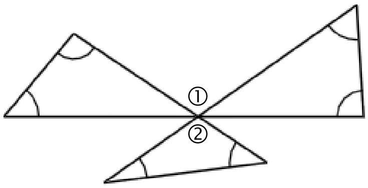
				21
	16			
		27		
				x

				21
	16			
		27		
			38	x
				49

On commence par la diagonale :
$16+11=27$;
$27+11=38$;
$38+11=49$;
Ensuite on appelle r l'augmentation de la dernière colonne et on a alors :
$21+3r=x$ et $x+r=49 \Leftrightarrow x=49-r$;
On en déduit donc que $21+3r=49-r \Leftrightarrow 4r=28 \Leftrightarrow r=7$;
$x=49-7=42$;
Réponse B)

10. Quelle est la somme des six angles marqués sur la figure ?
A) 300° B) 450° C) 360° D) 600° E) 380°





Il y a 3 triangles et donc la somme de tous les angles de ces triangles est de : $180\times 3=540°$;
L'angle ① et l'angle ② sont opposés par le sommet et donc de même mesure ;
La somme des 3 angles non marqués est donc de 180° ;
La somme recherchée est de $540-180=360°$;
Réponse C)

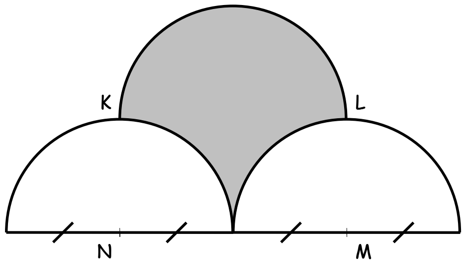
11. La moyenne de dix nombres entiers, différents et strictement positifs, est 10. Le plus grand de ces 10 nombres vaut au maximum :
A) 10 B) 45 C) 50 D) 55 E) 91

La moyenne des dix entiers naturels distincts étant 10, alors leur somme vaut 100 ;
Pour maximiser le plus grand des dix nombres, on doit minimiser les 9 autres ;
Comme ils sont tous entiers alors, la somme la plus petite est obtenue par :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{9\times 10}{2}=45$$;

Le plus grand des 10 nombres vaut au maximum 55.
Réponse D)

12. La figure montre trois demi-cercle de rayon 2. *KLMN* est un rectangle.
Quelle est l'aire de la partie grisée ?
A) 2π B) 7 C) $2\pi+1$ D) 8 E) $2\pi+2$



Le demi-disque de diamètre $[KL]$ a pour aire : $\dfrac{\pi\times 2^2}{2}=2\pi$;

Le rectangle *KLMN* a pour aire : $4\times 2=8$;

Les quarts de cercle de rayon 2 ont pour aire $\dfrac{\pi\times 2^2}{4}=\pi$;

L'aire de la partie grisée est donc donné par :
$2\pi+8-\pi-\pi=8$;
Réponse D)

13. Parmi les couples de nombres réels tels que $x^2+y^2=4$, …

A) il existe exactement un couple de nombres $(x\ ;\ y)$ tel que $x+y=2$

B) il existe exactement un couple de nombres $(x\ ;\ y)$ tel que $x+y\neq 2$

C) il n'existe aucun couple de nombres $(x\ ;\ y)$ tel que $x+y=2$

D) il n'existe aucun couple de nombres $(x\ ;\ y)$ tel que $x+y\neq 2$

E) il existe deux couples de nombres $(x\ ;\ y)$ tels que $x+y=2$

Déterminons les solutions du système suivant : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$;

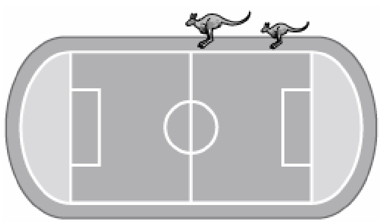
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y)^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+4+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases} ;$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-4y=0 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y(y-2)=0 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ou } y=2 \\ x=2 \text{ ou } y=0 \end{cases} ;$$

Il y a donc exactement 2 solutions $(2\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 2)$;

Réponse E)

14. Une mère kangourou et son bébé Jumpy sautent autour d'un stade de périmètre 330 m. Chaque seconde, Jumpy fait un bond de 2 m, sa mère fait un bond de 5 m. Ils partent du même point et dans la même direction. Après 25 secondes, Jumpy se fatigue et s'arrête alors que sa mère continue de sauter. Dans combien de temps repassera-t-elle à la hauteur de Jumpy ?



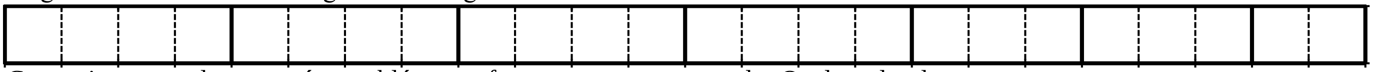
A) 15 s B) 24 s C) 51 s
D) 66 s E) 76 s

En 25 secondes, la mère aura parcouru $25\times 5=125\,\text{m}$;
En 25 secondes, Jumpy aura parcouru $25\times 2=50$ m ;
La mère devra donc parcourir $330-125+50=255$ m ;

Il repassera à la hauteur de Jumpy en : $\dfrac{255}{5}=51$ s ;

Réponse C)

15. Un rectangle de 24 cm de longueur et 1 cm de large est divisé en petits rectangles de 1 cm de large : quatre rectangles d'une longueur de 4 cm, deux rectangles d'une longueur de 3 cm et un rectangle d'une longueur de 2 cm.



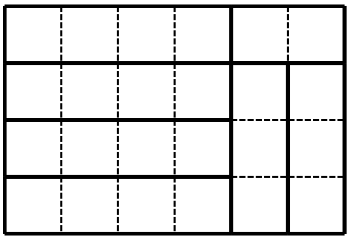
Ces petits rectangles sont réassemblés pour former un autre rectangle. Quel est le plus petit périmètre possible pour ce rectangle ?

A) 14 cm B) 20 cm C) 22 cm D) 25 cm E) 28 cm

Appelons x la longueur du rectangle recherché et y sa largeur ;

Le périmètre est donné par $2(x+y)$ avec $x \geqslant y$ et x et y entiers naturels ;

L'aire de ce rectangle est donc de 24 et on a : $xy = 24$;



Tous les couples $(x\ ;\ y)$ possibles sont donc :

$(24\ ;1)$; $(12\ ;2)$; $(8\ ;3)$; $(6\ ;4)$;

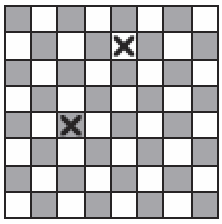
Les périmètres correspondants sont donc : 50 ; 48 ; 22 et 20 ;

En rassemblant correctement les 7 morceaux du départ, on peut faire un rectangle de 6 par 4, dont le périmètre est 20 cm ;

Réponse B)

16. De combien de façons peut-on choisir une case blanche et une case noire sur un échiquier de 8 sur 8, sans qu'elles ne soient ni sur la même colonne, ni sur la même ligne ?

(Un exemple est donnée par la figure ci-contre)



A) 56 B) 5040 C) 720

D) 672 E) 768

Commençons par déterminer le nombre de cases possibles par notre première croix dans les blanches ; facile, on en a 32 ;

Une fois la case blanche cochées, automatiquement 8 cases noires ne peuvent plus être utilisées (4 dans la même ligne et 4 dans la même colonne) ; il nous reste donc $32-8=24$ choix possibles pour la croix noire ;

Il y a donc $32\times24=768$ façons de remplir l'échiquier ;

Réponse E)

17. Deux bouteilles de même volume contiennent chacune un mélange d'eau et de sirop. Les rapports du volume d'eau au volume de sirop sont respectivement 2 pour 1 dans une bouteille et 4 pour 1 dans l'autre. On met le contenu des deux bouteilles dans une seule bouteille plus grande. Quel est le rapport du volume d'eau au volume de sirop dans cette bouteille ?

A) 3 pour 1 B) 6 pour 2 C) 11 pour 4 D) 5 pour 1 E) 8 pour 1

Appelons x le volume de chaque bouteilles de départ ;

Le volume d'eau de la 1[ère] est donc : $\frac{2}{3}x\ \left(\frac{1}{3}x \text{ pour le sirop}\right)$ [on retrouve bien 2 pour 1]

Le volume d'eau de la 2[e] est donc : $\frac{4}{5}x\ \left(\frac{1}{5}x \text{ pour le sirop}\right)$ [on retrouve bien 4 pour 1]

La grand bouteille contient après mélange un volume de $2x$;

Le volume d'eau dans la grande bouteille est donc de $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=\frac{22}{15}x$;

Le volume de sirop dans la grand bouteille est donc $2x-\frac{22}{15}x=\frac{8}{15}x$;

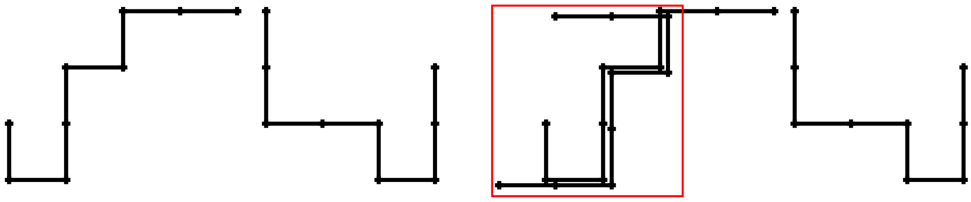
Le rapport $\frac{\text{eau}}{\text{sirop}}$ dans la grande bouteille est donc donné par :

$$\frac{\frac{22}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{22}{15}\times\frac{15}{8}=\frac{11}{4}$$

Réponse C)

18. Chacun de ces deux morceaux de fil de fer est constitué de huit segments de longueur 1. On les place l'un sur l'autre de façon qu'ils coïncident partiellement. Quelle plus grande longueur peuvent-ils avoir en commun ?

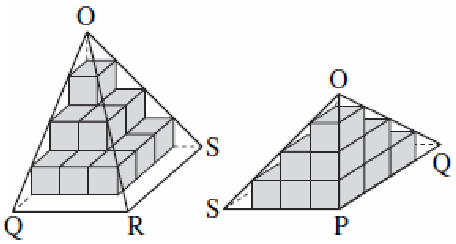
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



Réponse D)

19. 14 cubes de volume 1 sont empilés comme le montrent les deux vues ci-contre. L'assemblage est entouré par une pyramide.
Quel est le volume de cette pyramide (OPQRS) ?

A) $\dfrac{64}{3}$ B) 64 C) $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$ D) $\dfrac{64\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{32}{3}$



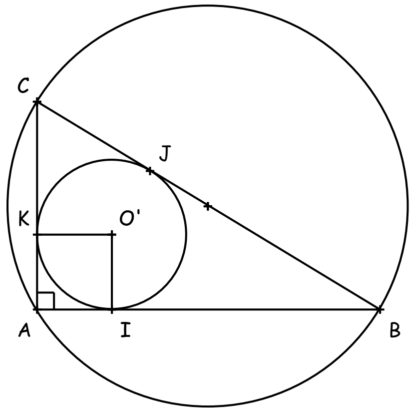
La pyramide OPQRS est une pyramide à base carrée (PQRS) telle que :
$OP = PS = PQ = RS = QR = 4$;

Son volume est donc donné par : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times 4^2 \times 4 = \dfrac{64}{3}$;

Réponse A)

20. Soient v et w les longueurs des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. Si y désigne le diamètre du cercle inscrit et Y celui du cercle circonscrit au triangle, alors combien vaut $y+Y$?

A) $v+w$ B) $2(v+w)$ C) $0,5(v+w)$ D) $\sqrt{vw}$ E) $\sqrt{v^2+w^2}$



Posons $AC=w$ et $AB=v$;
I, J et K sont les points des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ où le cercle inscrit est tangent ;
Les propriétés de la bissectrices d'un angle nous permet de dire que :
$BJ=BI$ et $CJ=CK$
Le diamètre du triangle ABC est donné par $Y=BJ+JC$;
On a donc $Y=BI+CK$;
De plus on a $IA=KA=\dfrac{y}{2}$;
Calculons $Y+y$:
$Y+y=BI+CK+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}=BI+IA+CK+KA=BA+CA=v+w$;
Réponse A)

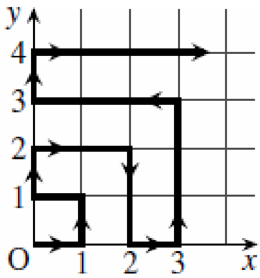
21. Combien la double inéquation $2000<\sqrt{n(n+1)}<2005$ a-t-elle de solutions entières positives ?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$n\in\mathbb{N}$ et donc $n>0$ et $n+1>0$;
$2000<\sqrt{n(n+1)}<2005 \quad\Leftrightarrow\quad 2000^2<n(n+1)<2005^2$;
Les solutions sont donc : 2 000 ; 2 001 ; 2 002 ; 2 003 ; 2 004
Réponse E)

22. Un sac contient 17 boules numérotées de 1 à 17. Quel est le plus petit nombre de boules à prendre au hasard pour être sûr d'obtenir au moins une paire de boules dont la somme des numéros soit 18 ?
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 17

Commençons par voir comment faire 18 en ajoutant 2 nombres entiers entre 1 et 17 :
$17+1$; $16+2$; $15+3$; $14+4$; $13+5$; $12+6$; $11+7$; $10+8$;
Si on choisit les neufs boules numérotées 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, on ne pourra pas avoir pour somme 18 ;
Si on choisit 10 boules, il y aura forcément deux boules qui correspondent à une somme déterminée précédemment ;
Réponse C)

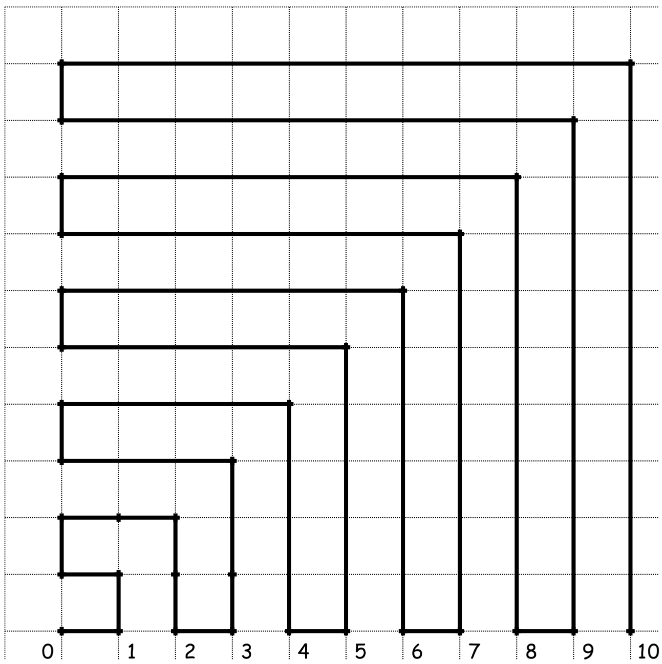
23. Un escargot dressé se déplace dans le premier quadrant. Partant de $(0\ ;\ 0)$, il va d'un point de coordonnées entières à un autre, comme montré sur la figure ci-contre, en se déplaçant d'une unité parallèle à un des deux axes chaque minute. Quelles sont les coordonnées du point atteint après 2 heures de déplacement ?



A) $(10\ ;\ 0)$ B) $(1\ ;11)$ C) $(10\ ;11)$

D) $(2\ ;10)$ E) $(11\ ;11)$

Réponse A)



24. 100 droites L_1, L_2, L_3, … , L_{100} sont tracés dans le plan.

Les 25 droites L_4, L_8, L_{12}, … , L_{100} sont parallèles.

Les 25 droites L_3, L_7, L_{11}, … , L_{99} sont concourantes.

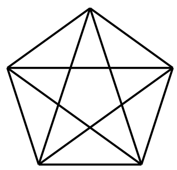
Quel est le nombre maximum de points d'intersection de ces 100 droites.

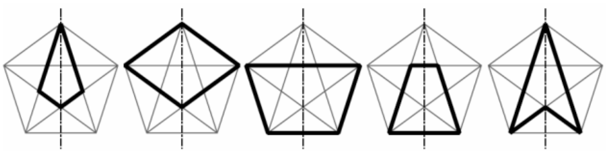
A) 2475 B) 4351 C) 4950 D) 4951 E) 5576

Réponse B)

Pour départager d'éventuels premiers ex æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

25. Luc a compté 17 vrais quadrilatères non croisés dans la figure ci-contre (un vrai quadrilatère n'a pas trois sommets alignés). Combien en a-t-il oubliés ?





Pour chaque axe de symétrie du pentagramme, il y a 5 quadrilatères possibles ;

Il y a en tout 5 axes de symétrie et donc $5\times5=25$ quadrilatères possibles au total ;

Il en manque 8…

26. Mathieu a choisi, pour les multiplier, 101 nombres entiers entre 0 et 99.
Le résultat est 100. Combien de choix différents des 101 nombres pouvait-il faire ?

$100 = 2\times 50 = 2^2 \times 25 = 2^2 \times 5^2$;
Les multiplications d'entiers entre 0 et 99 qui donne 100 sont :
1×100 ;
2×50 ;
$2\times 2\times 25$
4×25 ;
10×10 ;
$2\times 2\times 5\times 5$
$2\times 5\times 10$;
$4\times 5\times 5$;
À chaque fois pour parvenir à 101 nombre, il ne reste plus qu'a ajouter le nombre de multiplication par 1 nécessaire ;
Il y a donc 8 choix différents possibles…